Pochodne cząstkowe

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Kwiecień 2020

Pochodna

Pochodna

Pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych jest definiowna podobnie do zwykłej pochodnej funkcji jednej zmiennej. Przypomnijmy więc, że

1. $f'(x_0)$ reprezentuje tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$,
2. $f'(x_0)$ jest granicą ciągu ilorazów różnicowych
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
o ile taka granica istnieje.
3. Pochodna $f'(x_0)$ reprezentuje prędkość, z jaką zmienia się wielkość $f(x)$ dla argumentu x_0.
4. Oczywiście, $f(x)$ musi być zdefiniowana w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, aby w ogóle móc próbować obliczać $f'(x_0)$.

Uwagi

1. Może się zdarzyć, że $f(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$. Mówimy wtedy, że pochodna jest *niewłaściwa*.
2. Jeżeli granicę zastąpimy przez granicę lewostronną lub prawostronną, otrzymamy *pochodną lewostronną* lub *pochodną prawostronną*.
3. Jeżeli obliczamy pochodną dla wielu punktów $x \in A \subset D_f$, to piszemy $f'(x)$.
4. Inna popularna notacja:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \quad \text{oraz} \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Pochodna cząstkowa

Idea

Jeżeli mamy funkcję $f(x, y)$, to możemy badać prędkość z jaką zmienia się wielkość $f(x, y)$ dla argumentu (x_0, y_0):

1. przy zmieniającym się x, a ustalonym $y = y_0$, to będzie pochodna cząstkowa względem x,
2. przy zmieniającym się y, a ustalonym $x = x_0$, to będzie pochodna cząstkowa względem y.

Obie liczby odnoszą się do punktu (x_0, y_0).
Gdy weźmiemy inny punkt (x_0', y_0'), to liczby te mogą być inne.

Definicja

Jeżeli $f(x, y)$ jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu otwartym punktu (x_0, y_0), czyli w kole otwartym $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$, to

1. *Pochodną cząstkową funkcji f względem x w punkcie* (x_0, y_0) nazywamy granicę
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$
2. *Pochodną cząstkową funkcji f względem y w punkcie* (x_0, y_0) nazywamy granicę
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

o ile te granice istnieją (mogą być równe ∞ lub $-\infty$).

Pochodne cząstkowe

Równoważna definicja

Inna możliwość, to:

1. pochodna cząstkowa funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

2. pochodna cząstkową funkcji f względem y w punkcie (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Pochodne cząstkowe

Inna notacja

Często stosowana jest alternatywna notacja:

1. pochodna cząstkowa funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv f_x(x_0, y_0)$$

2. pochodna cząstkowa funkcji f względem y w punkcie (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv f_y(x_0, y_0)$$

Definicja dla $f(x, y, z)$

Jeżeli $f(x, y, z)$ jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu otwartym punktu (x_0, y_0, z_0), czyli w kuli otwartej $\mathcal{O}((x_0, y_0, z_0), r)$, to

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0},$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}.$$

Inna notacja

Często używana jest alternatywna notacja:

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \equiv f_x(x_0, y_0, z_0),$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \equiv f_y(x_0, y_0, z_0),$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \equiv f_z(x_0, y_0, z_0).$$

Jeżeli bierzemy wiele punktów (x, y, z) ze zbioru $A \subset D_f$, piszemy: $f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$,
a nawet bez argumentów: f_x, f_y, f_z.

Obserwacja

Z definicji widać, że zasady różniczkowania cząstkowego powinny być takie same jak zwykłego różniczkowania, ponieważ definicje są analogiczne. Trzeba jedynie pamiętać, że różniczkujemy względem jednej wybranej zmiennej, a pozostałe są ustalone, czyli musimy je traktować jak stałe.

Przykład

Stosując tę zasadę, obliczymy pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = e^{x\sin y}.$$

Ustalamy y i różniczkujemy względem x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x\sin y}\sin y.$$

Ustalamy x i różniczkujemy względem y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x\sin y}x\cos y.$$

Przykład

Obliczymy teraz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = \sqrt{x\sin(x^2y)}$$

Ustalamy y i różniczkujemy względem x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x\sin(x^2y)}}(\sin(x^2y) + x \cdot 2xy\cos(x^2y)).$$

Ustalamy x i różniczkujemy względem y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x\sin(x^2y)}}(x \cdot x^2\cos(x^2y)).$$

Pochodne cząstkowe

Przykład pochodnej w punkcie

Obliczmy $f_z(1, \pi, 1)$ dla funkcji

$$f(x, y, z) = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$$

Otrzymujemy

$$f_z(x, y, z) = \left(-\frac{xy}{z^2}\right)\cos\left(\frac{xy}{z}\right)$$

więc

$$f_z(1, \pi, 1) = -\pi\cos\pi = \pi$$

Trudniejszy przykład

Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

w punkcie $(0,0)$. Mamy z definicji:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

Podobnie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

Pochodne cząstkowe

Trudniejszy przykład

W pozostałych punktach już liczymy "normalnie", bo tam funkcja nie jest "sklejana":

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{y(x^2+y^2)-2x(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x(x^2+y^2)-2y(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

w dowolnym $(x, y) \neq (0, 0)$.

Uwaga

Zauważmy, że badana funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, a ma pochodne cząstkowe w tym punkcie.
Wniosek:
Istnienie pochodnych cząstkowych w punkcie nie gwarantuje ciągłości w tym punkcie.

Pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ w $(0,0)$.

Z definicji, mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\end{aligned}$$

ale ta granica nie istnieje ponieważ jeżeli weźmiemy $\Delta x<0$, otrzymamy w granicy -1, a jeżeli weźmiemy $\Delta x>0$, otrzymamy w granicy 1. Tak więc $f_x(0,0)$ nie istnieje. Podobnie pokazujemy, że $f_y(0,0)$ nie istnieje.

Wniosek: f jest ciągła w $(0,0)$, ale nie ma w tym punkcie pochodnych cząstkowych.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Jeżeli f_x, f_y (pochodne cząstkowe pierwszego rzędu) istnieją na pewnym zbiorze otwartym $\mathcal{O}$, to tzw. *pochodne cząstkowe drugiego rzędu* na zbiorze $\mathcal{O}$ mają postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xx}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yy}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yx}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xy}
\end{aligned}$$

jeżeli istnieją (ostatnie dwie nazywają się *pochodnymi mieszanymi*).

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Oznaczenia na pochodne w punkcie

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &\equiv f_{xx}(x_0, y_0), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &\equiv f_{yy}(x_0, y_0), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &\equiv f_{yx}(x_0, y_0), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &\equiv f_{xy}(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Przykład $f(x,y) = x\sin(xy^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Mamy

$$\begin{aligned} f_x &= \sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2) \\ f_y &= 2x^2y\cos(xy^2) \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y^2\cos(xy^2) - xy^4\sin(xy^2) \\ f_{yy} &= 2x^2\cos(xy^2) - 4x^3y^2\sin(xy^2) \\ f_{xy} &= 4xy\cos(xy^2) - 2x^2y^3\sin(xy^2) \\ f_{yx} &= 4xy\cos(xy^2) - 2x^2y^3\sin(xy^2) \end{aligned}$$

Wzory zachodzą na całej dziedzinie: $\mathbb{R}^2$.

Twierdzenie Schwarza

Jeżeli $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne mieszane drugiego rzędu na zbiorze otwartym $O \subset D_f$, to

$$f_{yx} = f_{xy} \ \text{na} \ \mathcal{O}$$

tzn. pochodne mieszane (drugiego rzędu) są równe na zbiorze $\mathcal{O}$. Podobne twierdzenie zachodzi dla pochodnych w punkcie.

$f(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$

Mamy

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2\cos x \sin x}{(\cos^2 x + e^{-y})^2} = \frac{\sin(2x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^2} \\ f_y &= \frac{e^{-y}}{(\cos^2 x + e^{-y})^2} \end{aligned}$$

na całej $\mathbb{R}^2$. Na kolejnym slajdzie obliczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Zauważmy, że są one ciągłe na swojej dziedzinie jako funkcje elementarne. Tak więc zachodzi twierdzenie Schwarza.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$f(x,y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{2\cos(2x)(\cos^2 x + e^{-y})^2 - 2(\cos^2 x + e^{-y})(-2\cos x \sin x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^4} \\
&= \frac{2\cos(2x)(\cos^2 x + e^{-y}) + 2\sin(2x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^3} \\
f_{yy} &= \frac{-e^{-y}(\cos^2 x + e^{-y})^2 + 2e^{-2y}(\cos^2 x + e^{-y})}{(\cos^2 x + e^{-y})^4} \\
&= \frac{-e^{-y}(\cos^2 x + e^{-y}) + 2e^{-2y}}{(\cos^2 x + e^{-y})^3} \\
f_{xy} &= \frac{2e^{-y}\sin(2x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^3} \\
f_{yx} &= \frac{2\sin(2x)e^{-y}}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}
\end{aligned}
$$

Pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y, z)$

Podobnie definiujemy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f(x, y, z)$:

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \quad f_{xz} = \frac{\partial f_x}{\partial z}, \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad f_{zx} = \frac{\partial f_z}{\partial x},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y}, \quad f_{yz} = \frac{\partial f_y}{\partial z}, \quad f_{zy} = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad f_{zz} = \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

o ile istnieją. Pochodne mieszane drugiego rzędu są równe jeżeli są ciągłe:

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{yz} = f_{zy}, \quad f_{xz} = f_{zx}$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Pochodne cząstkowe wyższego rzędu są definiowane w sposób naturalny. Przykładowo, jeżeli $f = f(x, y)$, to

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \equiv f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} f_{xx}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} \equiv f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y} f_{xy}$$

etc. Należy zwrócić uwagę na kolejność x-ów i y-ów w obu notacjach. Tu się można łatwo pomylić.

Mieszane pochodne cząstkowe wyższych rzędów o tej samej liczbie x-ów i y-ów też są równe jeżeli są ciągłe.

Na przykład,

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

$$f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}$$

Koniec

Dziękuję za uwagę!